

# Von Mises 应力约束的连续结构 的一种双向拓扑优化方法

何林伟, 蔡国平

(上海交通大学 工程力学系, 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

**摘要:** 本文依照双向进化结构拓扑优化方法(BESO)的基本思路,采用一种双区域技术,设计了一种双向进化拓扑优化方法,将设计区域划分为两个区域:用于显示结构拓扑构型的前台区域以及用于搜索单元可能生长方向的后台区域。根据结构有限元计算确定单元所在区域,并根据不同的区域,增加或删除结构单元,从而获得最优的拓扑构型。文章最后通过数值算例验证了该方法的可行性。

**关键词:** 拓扑优化; Von Mises 应力; 双向进化

**中图分类号:** U448.27

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0254-0053(2011)01-19-09

## A Bi-directional Optimization Method for Continuous Structures Subject to Von Mises Stress Constraints

*He Lin-wei, CAI Guo-ping*

(Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Ocean Engineering,  
Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Following the original ideas in the bi-directional evolutionary structural optimization, a bi-directional topology optimization method was designed by using a bi-region technique. The design domain is divided into two regions: foreground region which indicates optimal topology and background region which searches element growth direction. The elements were placed in foreground region or background region based on the finite element method results. In addition, the elements were added or removed according to the regions they occupy. Finally, the optimization finds an optimal topology. Numerical examples are carried out to verify this method.

**Key words:** topology optimization; Von Mises stress; bi-directional evolution

结构优化对于实际工程具有重要意义,如何能在满足性能要求的前提下设计出尽可能合理、先进和经济的结构已经成为机械、船舶海洋、航空航天等工程领域的重要研究课题。传统的靠设计人员的经验和模型试验的结果来调整结构设计参数的方法已经不能满足实际工程的需要,必须采用优化的方法来对结构的尺寸、拓扑进行优化。

对结构进行拓扑优化的难度要大于尺寸优化<sup>[1]</sup>。目前广泛采用的对结构进行拓扑优化的方法是基结构方法<sup>[2]</sup>,该方法从基结构中删除不重要的单元,筛选出一个合适的拓扑构型。Bendsøe<sup>[3]</sup>以结构的最小

收稿日期:2010-10-08

基金项目:国家自然科学基金(11072146, 10772112, 11002087),教育部博士点基金(20070248032),上海市教委科研重点项目(09ZZ17)和海洋工程国家重点实验室自主研究课题(GKZD010807)资助项目

作者简介:何林伟(1985-),男,桂林人,硕士研究生,研究方向:结构优化, Email: helinwei2000@163.com.

通讯作者:蔡国平,上海交通大学工程力学系, Email: caigp@sjtu.edu.cn, 电话: 13012817217.

应变能为目标函数,使用灵敏度分析,推导出了单元权重的迭代关系,求解了大量的拓扑优化问题。在实际应用中,结构中最受关注的性能指标之一是结构的最大 Von Mises 应力,由于 Von Mises 应力是非线性的,用解析方法求解该类拓扑优化问题是比较困难的。1992 年,Steven 和 Xie<sup>[4,5]</sup>,针对 Von Mises 应力约束问题,提出了基于启发式准则的渐进结构拓扑优化方法(ESO)。该方法在每次迭代中直接将不重要的单元删除,从而获得结构的最优拓扑构型,因此又名“Hard Kill”方法。尽管没有严格的数学证明,该方法得到了广泛的应用。Xie 等<sup>[6]</sup>求解了在动力学约束问题,Chu 等<sup>[7]</sup>求解了位移约束问题。Tanskanen 从理论的角度对 ESO 进行了论证<sup>[8]</sup>。在工程应用上,为了使拓扑结构拥有光滑的边缘,产生了 Fixed-Grid ESO (FG-ESO)<sup>[9]</sup>,ESO with Boundary Element Method<sup>[10]</sup>, Isolines Topology Design (ITD)<sup>[11]</sup>等方法。

ESO 是基于基结构的,一般而言,预定义的基结构需要包含结构的各种可能拓扑构型,单元数量较多,导致计算量增加,并且存在误删除单元恢复困难的问题。Querin<sup>[12]</sup>提出了一种双向进化结构拓扑优化方法(BESO),从简单设计区域开始,在迭代过程中有效地删除或者添加单元,实现结构的自生长。Huang 和 Xie<sup>[13]</sup>使用 BESO 求解了周期结构的拓扑优化问题。Young<sup>[14]</sup>将 BESO 应用于多工况的情况,并求解了二维和三维的问题。

目前关于双向进化的研究较少。本文采用一种双区域技术,设计了一种类似 BESO 的双向拓扑优化方法。推导了平面应力假设下,结构在 Von Mises 应力约束下拓扑优化问题的目标函数,介绍了优化的准则及基于该准则的单元增与减的操作。文章最后通过数值算例验证了该方法的可行性。

## 1 优化方法

### 1.1 目标函数

本文按照以下定义确定基于 Von Mises 应力(以下均简称为应力)的目标函数。假设有两个不同的拓扑构型 A 与 B,拓扑构型 A 中,最大应力为  $\sigma_A$ ,结构重量为  $m_{A0}$ 。在拓扑构型 B 中,最大应力为  $\sigma_B$ ,结构重量是  $m_{B0}$ 。为了比较这两个拓扑构型的优劣,引入参考应力  $\bar{\sigma}$  以及放大系数  $Y_A$  和  $Y_B$ ,则有

$$Y_A = \frac{\sigma_A}{\bar{\sigma}}, \quad Y_B = \frac{\sigma_B}{\bar{\sigma}} \quad (1)$$

在平面应力假设下,通过分别改变拓扑结构 A 与 B 的初始厚度  $t_{A0}$  和  $t_{B0}$ ,可以使这两个结构的最大应力相等

$$t_A = Y_A t_{A0}, \quad t_B = Y_B t_{B0} \quad (2)$$

其中  $t_A$  和  $t_B$  分别是结构 A 与 B 的计算厚度,这两厚度的取值使拓扑结构 A 与 B 的最大应力相等。因此,这两个结构的计算质量  $m_A$  和  $m_B$  可通过下式求出

$$m_A = Y_A m_{A0}, \quad m_B = Y_B m_{B0} \quad (3)$$

比较式(1)与式(3),可得

$$m_A = \frac{\sigma_A m_{A0}}{\bar{\sigma}}, \quad m_B = \frac{\sigma_B m_{B0}}{\bar{\sigma}} \quad (4)$$

在考虑结构应力的拓扑优化问题中,当结构的最大应力相等时,重量轻的结构具有更优的拓扑构型,因此拓扑结构 A 与 B 的优劣比较转化为计算  $\frac{\sigma_{\max} m}{\bar{\sigma}}$ 。本文中优化的目标函数定义为

$$f = \frac{\sigma_{\max} m}{\bar{\sigma}} \quad (5)$$

其中  $\sigma_{\max}$  是结构的最大应力,  $m$  是结构重量,  $\bar{\sigma}$  是上文所说的参考应力。

从目标函数的定义上可以看出,本文所求的机构拓扑构型应同时具有较低的最大应力以及较轻的结

构重量。对拓扑优化而言,主要依靠删除单元来减少结构的重量  $m$ ,然而当结构的单元减少后,往往导致最大应力  $\sigma_{\max}$  的增加。在结构中,每个单元对结构性能的贡献并不相同,这就需要优化算法对结构中所有的单元进行选择,删除对结构力学性能影响小的单元,保留或增加对力学性能影响大的单元。在应力约束问题中,考虑的主要问题是传力路径,即结构将外载传到支座的传递路线。对于在传力路径上的单元应该保留,而离传力路径较远的单元可以考虑删除。对于以生长为主的优化算法,还应该考虑如何添加单元来获得最佳的传力路径,即在哪些地方添加单元可以改变已有的传力路径,使传力路径更合理。在对结构进行有限元分析后,本文认为,应力较大的单元为传力路径上的关键单元,应该予以保留,而应力较小的单元为次要单元,可以删除。同时,在应力过大的单元周围产生新的单元,以试图获得更佳的传力路径。如果新增加的单元可以使结构性能更优,则传力路径会偏移到新增单元上来。于是,传力路径逐渐改变,从而获得结构的最优拓扑构型。

## 1.2 优化变量及迭代

本文中各单元在结构中的权重即为优化变量,记为列向量  $\mathbf{x}$ ,  $x_i \in (\alpha_{\text{low}}, \alpha_{\text{high}}]$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  是结构的总单元数,  $\alpha_{\text{low}}$  与  $\alpha_{\text{high}}$  是给定的实数。再定义  $\alpha_{\text{mid}}$  ( $\alpha_{\text{low}} < \alpha_{\text{mid}} < \alpha_{\text{high}}$ ) 作为本文所介绍的双区域的划分标准值。若  $x_i \in (\alpha_{\text{mid}}, \alpha_{\text{high}}]$ , 将单元  $i$  设为前台区域单元,用于确定结构的设计拓扑构型,若  $x_i \in (\alpha_{\text{low}}, \alpha_{\text{mid}}]$ , 则设为后台区域单元,用于搜索单元可能的生长区域。结构中这两区域的构成见图 1。

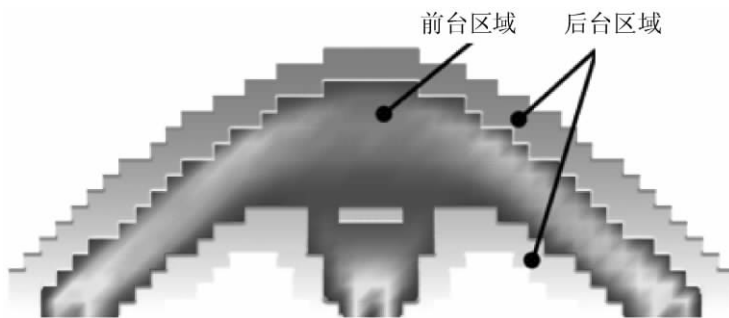


图 1 双区域结构

Fig. 1 A bi-region structure

为建立优化变量与结构性能的联系,参照 SIMP 理论<sup>[15-16]</sup>,令

$$E_i = x_i^\beta E_{i0}, \quad i=1 \sim n \quad (6)$$

$$\rho_i = x_i \rho_{i0}, \quad i=1 \sim n \quad (7)$$

其中  $E_i$  是单元  $i$  的计算刚度,  $E_{i0}$  是单元  $i$  的初始刚度,  $\beta$  是单元的权重影响系数,  $\rho_i$  是单元  $i$  的计算密度,  $\rho_{i0}$  是单元  $i$  的初始密度。因而,  $\mathbf{x}$  的取值情况决定结构中刚度的分布情况,式(6)和(7)将连续结构拓扑优化问题转化为材料分布的问题。

本文中  $\alpha_{\text{low}}$ 、 $\alpha_{\text{mid}}$  与  $\alpha_{\text{high}}$  分别取为 0.001、0.5 和 1.5。  $\alpha_{\text{high}} > 1.0$  表明单元为超极限状态,该状态是增加的单元的重要标准,下文会详细介绍。  $\beta$  取为 1.0。从式(6)中可以看出,如果  $\beta$  取值过高,对于后台区域单元  $x_i \in (\alpha_{\text{low}}, \alpha_{\text{mid}}]$  而言,刚度  $E$  将很小,这会严重地减小后台区域单元对结构生长方向的搜索能力。

根据式(5),获得本文问题的拓扑优化数学表达

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{\max(\boldsymbol{\sigma})}{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{V} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{KU} = \mathbf{F} \\ & \frac{\max(\boldsymbol{\sigma})}{\bar{\sigma}} < \bar{Y} \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\boldsymbol{\rho}$  和  $\mathbf{V}$  分别是单元的密度与体积列向量,  $\mathbf{K}$  是结构的刚度阵,  $\mathbf{U}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$  和  $\mathbf{F}$  分别是节点位移列向量、单元的平均应力列向量和外载列向量,  $\bar{\sigma}$  是参考应力,  $\bar{Y}$  是允许的最大放大系数。

从式(8)中可以看出,等式约束  $KU=F$  是平衡方程,而  $\frac{\max(\sigma)}{\bar{\sigma}} < \bar{Y}$  是目标函数式(5)成立的假设条件,即结构的厚度不能太大,否则不满足平面应力假设。因为 Von Mises 应力约束是非线性的,根据式(9)推导出数学迭代关系  $x_{k+1}=T(x_k)$  是比较困难的。在本文中,结构是逐渐生长的,这意味着在计算初期结构往往是不满足约束条件  $\frac{\max(\sigma)}{\bar{\sigma}} < \bar{Y}$  的,更增加了推导数学迭代关系式的难度。因此,本文采用了准则优化的办法,定义两个应力阈值  $\sigma_{des}$  和  $\sigma_{sup}$ ,如果单元  $i$  的应力  $\sigma_i$  大于  $\sigma_{sup}$ ,则增加  $x_i$  的值,否则若  $\sigma_i < \sigma_{des}$ ,减小  $x_i$  的值。该方法的流程如下。

求出结构所有单元的平均应力  $\sigma_{avg}$  以及最大应力  $\sigma_{max}$ ,依据下式计算  $x_{k+1}$

$$\sigma_{sup} = \sigma_{max} (1 - \gamma_{sup} \lambda_k) \quad (9)$$

$$\sigma_{des} = \sigma_{avg} \gamma_{des} \quad (10)$$

$$x_{k+1} = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\sigma_{sup}} x_k, & \sigma_i > \sigma_{sup} \\ \frac{\sigma_i}{\sigma_{des}} x_k, & \sigma_i < \sigma_{des} \\ x_k, & \sigma_{des} \leq \sigma_i \leq \sigma_{sup} \end{cases} \quad (11)$$

其中  $\lambda_k \in [0,1]$  与  $\gamma_{sup} \in (0,1)$  是增强系数。本文中  $\gamma_{sup}$  取恒定值 0.8。 $\lambda_k$  随计算迭代次数增加而逐渐减小,其初始值为 1.0。 $\gamma_{des} \in (0,1)$  是削弱系数,本文中取恒定值 0.3。在一次迭代过程中,如果单元  $i$  的权重系数  $x_i$  从  $x_i \leq \alpha_{mid}$  增加到了  $x_i > \alpha_{mid}$ ,则将该单元设定为前台区域单元,而如果  $x_i$  从  $x_i > \alpha_{mid}$  减小到了  $\alpha_{low} < x_i \leq \alpha_{mid}$ ,则将该单元从前台区域去除,设定为后台区域单元。如果  $x_i > 1$ ,说明该单元处于超极限状态(弹性模量及密度大于实际材料的数值),则采用单元生长技术(图 2),在单元  $i$  的周围产生若干权重系数为  $x = \alpha_{mid}$  的后台区域单元(图 2a),同时将单元  $i$  的权重系数设定为 1.0。若  $x_i = \alpha_{high}$ ,将增加更多的单元(图 2b)。如果  $x_i \leq \alpha_{low}$ ,则采用单元删除技术,将单元从结构中去除,并在有限元计算前对所有单元节点进行重新编号。

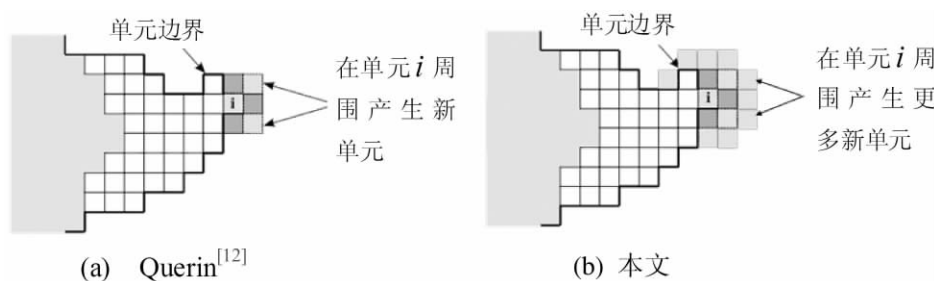


图 2 单元生长技术

Fig. 2 Techniques of element addition

于是,本文设计的拓扑优化过程可以简单表述为:将一些单元从后台区域单元转换为前台区域单元,将一些前台区域单元转化为后台区域单元,采用单元生长技术产生一部分新的后台区域单元,采用单元删除技术删除一部分后台区域单元。这样结构通过不断地转化单元、增加单元、删除单元,逐渐进化得到优化的拓扑构型。

### 1.3 终止条件

本文将结构单元划分为前台与后台两个区域,认为前台区域决定了结构的拓扑,而后台区域仅用于搜索可能生长方向。由于  $\beta$  不能太大,后台区域单元对结构性能是有影响的。因此,本文从保守的角度,将优化过程分为两个阶段。第一个阶段为形成拓扑构型阶段,随着后台区域单元的不断产生,结构的前台区域单元逐步向优化的方向进化,从而让前台区域单元形成最优的拓扑构型。该阶段的收敛标准为,在几个迭代周期内,结构中增加的单元数始终等于删除的单元数。第二个阶段为拓扑结构的验证阶段,通过大幅

删除后台区域单元,减小后台区域单元对结构的影响,以验证前台区域即为最优拓扑。该阶段的控制参数是  $\lambda_k$ ,令  $\lambda_k$  大幅下降,可以极大地限制单元增加,从而破坏第一阶段收敛时的平衡状态,使删除单元起主要作用。该阶段的收敛标准是,后台区域单元数量小于一个给定的数。第二阶段结束后,即认为拓扑优化已经结束。

需要注意的是,像很多启发式拓扑优化方法一样,本文方法并没有严格的理论证明。

#### 1.4 若干问题的讨论

连续体拓扑优化遇到的一个重要问题是棋盘效应<sup>[17]</sup>。袁振、吴长春等<sup>[18]</sup>采用非协调单元进行了结构拓扑优化设计,并与采用协调等参单元的结构拓扑设计进行对比,验证了采用非协调单元时得到更高精度的拓扑优化结果,有效克服拓扑优化计算中出现的棋盘格式现象。Bendsøe 等<sup>[3]</sup>采用一种区域均匀的策略,使相邻单元间的权重得到一定程度的平均,从而避免棋盘效应的出现。本文方法中,由于计算的应力为单元的平均 Von Mises 应力,单元的应力值取为单元 4 个节点 Von Mises 应力的平均值,这相当于对单元进行了应力平均处理,因此不存在棋盘效应的问题。

在基结构的方法中,一般不需要对单元进行真正的删除操作,而是让结构的权重取一个很小的正数,从而降低这些单元对结构性能的影响,为方便描述,令其为方法 I。在本文中,结构会增加、删除单元,因而在有限元分析时将对所有单元和节点进行整理和重新编号,令其为方法 II。从算法复杂度的层面上讨论,令结构的节点数为  $ns$ ,基结构的节点数为  $ng$ 。方法 I 中,已“删除”单元仍然参与结构有限元分析,因而整体刚度阵为  $(2ng) \times (2ng)$  方阵,静力学结构分析的算法复杂度至少是  $O(ng^2)$ (即该计算量与  $ng$  是二次方关系);方法 II 中,整体刚度阵为  $(2ns) \times (2ns)$  方阵,相应的复杂度是  $O(ns^2)$ ,但该方法需要对结构的所有单元进行遍历,重新建立“单元—节点”关系,这样将额外增加  $O(n)$  的计算量(即该计算量与结构单元总数  $n$  是线性关系),于是方法 II 的算法复杂度是  $O(ns^2) + O(n)$ 。以生长为主要进化方向的拓扑结构的  $ns$  相对较小,  $O(ns^2)$  远小于  $O(ng^2)$ ,一般而言可以使  $O(ns^2) + O(n)$  仍然小于  $O(ng^2)$ 。因此方法 II 可以使计算效率得到相当大的提升,拓扑结构越简洁,计算速度越快。

#### 1.5 优化流程图

本文所给优化方法的计算迭代流程图如图 3 所示。

## 2 算例

### 2.1 算例 1

算例 1 是经典的拓扑优化算例(图 4),结构左右两侧为固定约束,中间受向下的集中力作用。结构的基本参数见表 1,优化过程以及结果如图 4。从图 4 中的计算过程可以看出,在计算初期几次迭代中,结构是不满足约束条件的,结构的重量  $m$  很小,而最大应力  $\sigma_{\max}$  很大,与参考应力  $\bar{\sigma}$  相比较,放大系数  $Y$  很大。因此,结构进化以增加单元为主,导致结构重量  $m$  迅速上升,而最大应力  $\sigma_{\max}$  急剧下降。一开始,结构拓扑构型极不合理,  $\Delta m$  ( $m$  的变化量)比  $\Delta \sigma_{\max}$  ( $\sigma_{\max}$  的变化量)更为显著,目标函数值上升。之后,结构拓扑缓慢成型,  $\Delta \sigma_{\max}$  起主要作用,因而目标函数值逐渐下降。在第 6 次迭代时,结构中增加的单元不能显著降低结构的最大应力,结构的拓扑构型已经大致形成,  $\Delta m$  重新占据主导作用,使目标函数重新上升。在第 10 到第 15 次迭代,  $m$  变化非常缓慢,表明结构中删除单元与增加单元的数量基本持平,此时结构的拓扑已经形成。之后  $\lambda_k$  缓慢减小,使结构缓慢地删除单元。在迭代数 30 时,结构中增加的单元数与删除的单元数已经完全一致,计算的第一阶段已经完成,进入第二阶段。在迭代数 40 时,大部分的后台区域单元均已删除(剩余的后台区域单元数小于 5),拓扑优化计算结束。

值得说明的是,通过观察迭代计算时前台区域的拓扑构型,在第 15 次迭代时,前台区域的拓扑构型已经与最终计算结果非常接近。其后的计算中几乎没有前台区域单元与后台区域单元的相互转换,结构拓扑构型几乎没有影响,这说明本文的双区域技术是有效的。

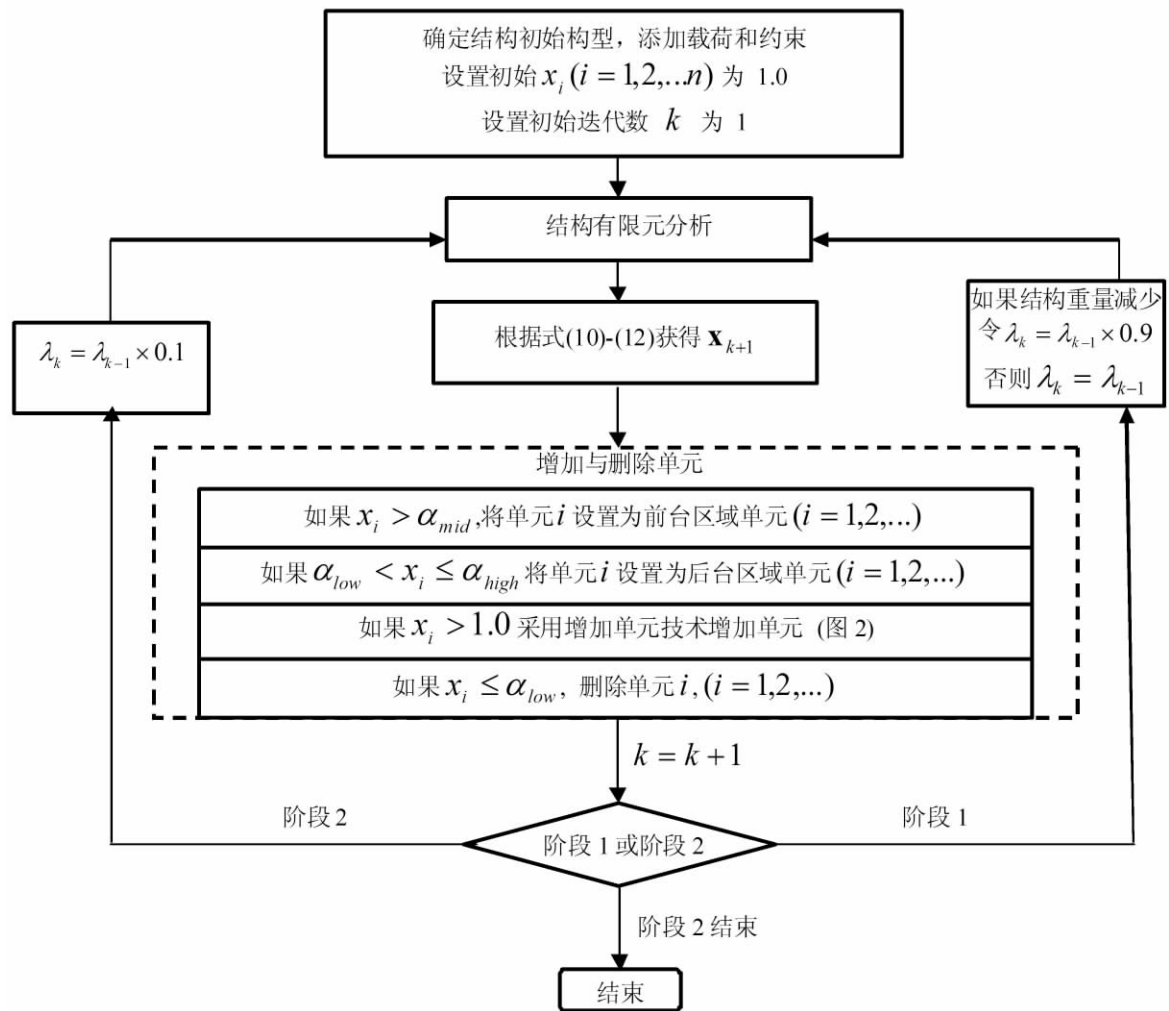


图 3 优化方法迭代流程图

Fig. 3 Flow chart of the optimization method

表 1 结构优化参数

Tab. 1 Parameters of the structural optimization

长度 (m)	约束	弹性模量 (Pa)	密度 (kg/m <sup>3</sup> )	厚度 (m)	泊松比	最大放大系数	参考应力 (Pa)	载荷 (N)
40	固定铰	$2.1 \times 10^{11}$	7800	0.1	0.3	1.5	$3 \times 10^8$	$4.45 \times 10^5$

## 2.2 算例 2

算例 2 也是一个经典的拓扑优化例子(图 5),结构左侧固定,右侧受向下集中力的作用。结构的参数见表 2,优化过程及结果见图 5。

表 2 结构优化参数

Tab. 2 Parameters of the structural optimization

长度 (m)	约束	弹性模量 (Pa)	密度 (kg/m <sup>3</sup> )	厚度 (m)	泊松比	最大放大系数	参考应力 (Pa)	载荷 (N)
40	左侧固定	$2.1 \times 10^{11}$	7800	0.1	0.3	1.5	$3 \times 10^8$	$4.45 \times 10^5$

图 6 是迭代数 8 到 10 时结构的拓扑构型结果,可见,结构内部逐步生长出一个斜支撑。由于该斜支撑的出现,结构的最大应力显著减小,目标函数值也同时减小。在第 14 次迭代时,该斜支撑已经完全成型。然而,该斜支撑产生的过程中同时产生了大量的后台区域单元,结构重量增加,目标函数值出现了回升。这一现象说明,该斜支撑可以有效地提升结构的性能,因此,在其逐渐形成时, $\Delta\sigma_{\max}$  起主导作用。但

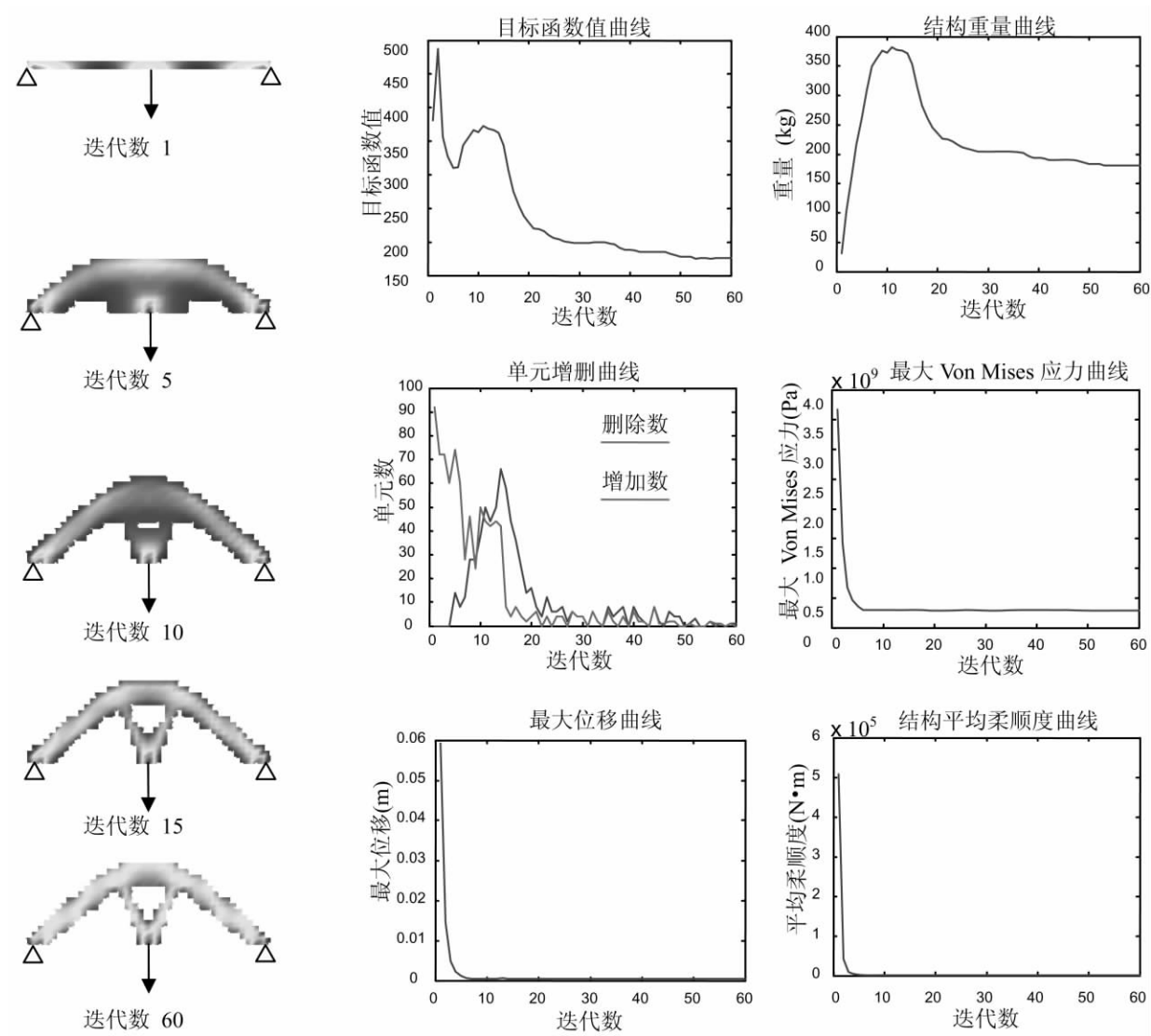


图 4 算例 1 拓扑优化过程及结果

Fig. 4 Procedure and results of the optimization of example 1

在其完全形成后,即使新增加单元,也无法显著提升结构的承载力,因而  $\Delta m$  起主导作用,此时的拓扑构型与 Bendsøe<sup>[3]</sup> 中的结果非常相似。此后,结构的生长并没有停止,随着结构外部拓扑构型逐渐变化,该斜支撑的作用越来越小,因而被逐渐削弱,最终在第 46 次迭代时,该斜支撑被完全删除,得到的拓扑构型与 Querin<sup>[12]</sup> 中的结果非常相似。删除该支撑引起了最大位移曲线的一个明显的波动(见图 5,最大位移曲线),但目标函数曲线、最大 Von Mises 曲线等未受到明显的影响。由于该斜支撑的产生与删除,结构中增加单元的数量与删除单元的数量出现了一系列波动,拓扑优化计算直到第 60 次迭代时结束,此时结构中增加与删除的单元数均接近于零,且后台区域单元数小于 5。

3 结论

本文对 Von Mises 应力约束下连续结构拓扑优化的问题进行了探讨,采用一种双区域的技术,设计了一种双向拓扑优化方法。通过将后台区域单元转化为前台区域单元,前台区域单元转化为后台区域单元,同时增加、删除后台区域单元,使结构不断生长进化,得到优化的拓扑构型。从本文对两个经典算例的计算上看,该方法是有效可行的。

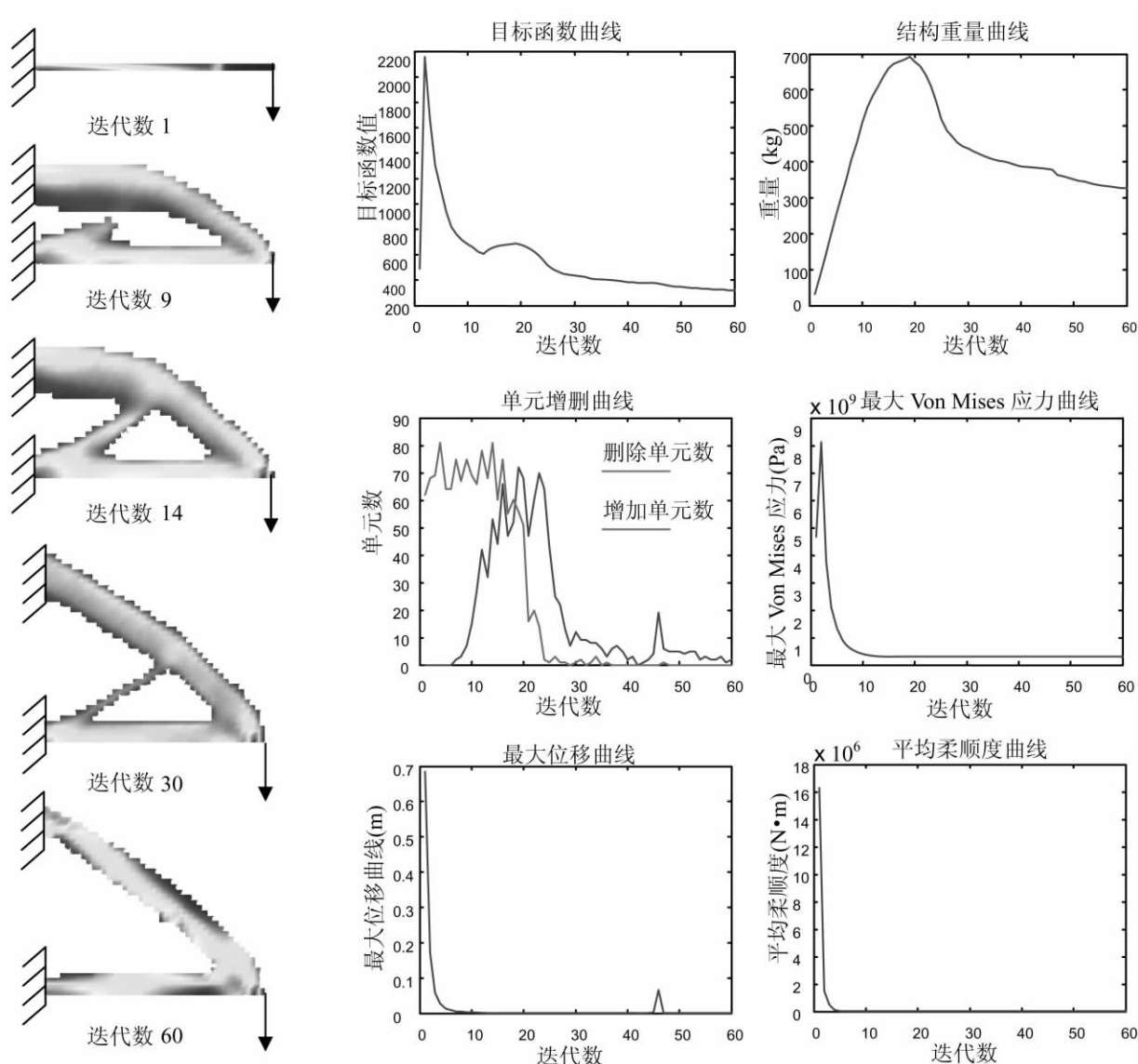


图 5 算例 2 拓扑优化过程及结果

Fig. 5 Procedure and results of the optimization of example 2

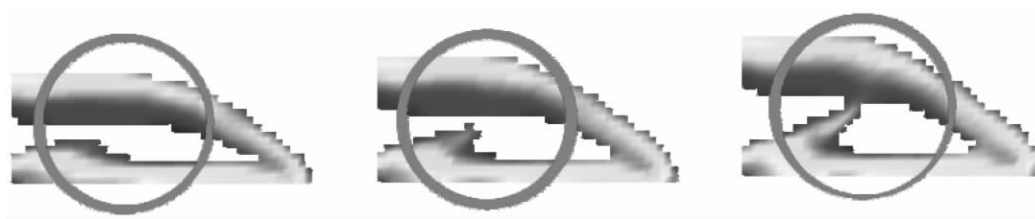


图 6 算例 2 中斜支撑的生长

Fig. 6 A growing tilted brace of example 2

## 参考文献:

- [1] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71: 197—224.
- [2] Rozvany G I N. Topoly optimization of multi-purpose structures[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 47: 265—288.
- [3] Bendsøe M P, Sigmund O. Topology Optimization—Theory, Methods and Applications[M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.



- [4] Xie Y M, Steven G P. Shape and layout optimization via an evolutionary procedure[C]. Proceedings of International Conference on Computational Engineering Science, Hong Kong, 1992, 17—22.
- [5] Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimization with FEA[J]. Computational Mechanics, 1993, 1: 27—34.
- [6] Xie Y M, Steven G P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems[J]. Computational and Structures, 1996, 58: 1067—1073.
- [7] Chu D N, Xie Y M, Hira A, Steven G P. An evolutionary procedure for structural optimization with displacement constraints[C]. In: Building for the 21st Century Proceeding of the Fifth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, 1995, 2: 1091—1096.
- [8] Tanskanen P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191: 5485—5498.
- [9] Kim H, Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implemented fixed grid mesh [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2003, 24: 441—448.
- [10] Cervera E, Trevelyan J. Evolutionary structural optimization based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms[J]. Computers and Structures, 2005, 83: 1902—1916.
- [11] Victoria M, Marti P, Querin O M. Topology design of two-dimensional continuum structures using isolines[J]. Computers and Structures, 2009, 87: 101—109.
- [12] Querin O M. Evolutionary structural optimization: stress based formulation and implementation[D]. PhD Thesis in University of Sydney, Sydney, 1997.
- [13] Huang X, Xie Y M. Optimal design of periodic structures using evolutionary topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 36: 597—606.
- [14] Young V, Querin O M, Steven G P. 3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (BESO)[J]. Structural Optimization, 1999, 18: 183—192.
- [15] Bendsoe M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. Structural Optimization, 1989, 1: 193—202.
- [16] Rozvany G I N, Zhou M, Birker T. Generalized shape optimization without homogenization[J]. Structural Optimization, 1992, 4: 250—254.
- [17] Diaz A, Sigmund O. Checkerboard patterns in layout optimization[J]. Structural Optimization, 1995, 10: 40—45.
- [18] 袁振, 吴长春. 采用非协调元的连续体拓扑优化设计[J]. 力学学报, 2003, 3(35): 176—180.