

水库汛期分期及其评价方法^{*}

张建生, 黄 强, 马永胜, 王义民

(西安理工大学 西北水资源与环境生态教育部重点实验室, 陕西 西安 710048)

[摘要] **【目的】**对2种不同汛期分期方法进行实例应用, 并对其相应分期结果进行对比分析与评价。**【方法】**在介绍分形理论与模糊集合理论的基础上, 以安康水库为例, 应用上述2种理论方法对水库进行汛期分期的求解, 首次提出了考虑权重因子的均方差评判指标 S , 并对2种方法的分期结果进行了对比与分析。**【结果】**利用分形理论得到安康水库的汛期分期结果为: 前汛期 05-01—06-20, 主汛期 1 06-21—07-20, 主汛期 2 07-21—08-20, 后汛期 08-21—10-10; 基于模糊集合理论的汛期分期结果为: 前汛期 05-01—07-15, 主汛期 07-16—08-20, 后汛期 08-21—10-31。在设定不同分期段不同权重因子组合下, 计算出的 $S_{\text{分形}}$ 值都较 $S_{\text{模糊}}$ 小。**【结论】**基于分形理论的汛期分期结果更为具体、准确; 而应用模糊集合理论所得到的汛期分期结果虽较为粗糙, 但可以依隶属度值为系数进而推求汛期的分期汛限水位。

[关键词] 水库; 水库调度; 汛期分期; 汛限水位; 洪水资源利用

[中图分类号] TV697.1

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2009)10-0229-06

Division of flood seasonal phases for reservoir and the evaluation method

ZHANG Jiang-sheng, HUANG Qiang, MA Yong-sheng, WANG Yi-min

(Key Lab of Northwest Water Resources and Environment Ecology of MOE at XAUT, Xi'an, Shaanxi 710048, China)

Abstract: **【Objective】**Two different division ways of flood seasonal phases were applied and the result was studied comparatively. **【Method】**Based on the introduction of the fractal theory and fuzzy set theory in this paper, taking Ankang Reservoir as an example, these two methods of theory were used to calculate the division of flood seasonal phases. The MSE (Mean square deviation) comparative index S considering power factor was firstly put forward, and the different results of two division methods of flood seasonal phases were analyzed. **【Result】**Based on the fractal theory, the result of division of flood seasonal phases of Ankang Reservoir showed previous flood seasonal phase was 05-01 to 06-20, main flood seasonal phase 1 06-21 to 07-20, main flood seasonal phase 2 07-21 to 08-20, latter flood seasonal phase 08-21 to 10-10; Based on fuzzy set theory, the result of division of flood seasonal phases for Ankang Reservoir demonstrated previous flood seasonal phase was 05-01 to 07-15, main flood seasonal phase 07-16 to 08-20, latter flood seasonal phase 08-21 to 10-31. The value of S_{Fractal} was smaller than the value of S_{Fuzzy} with different powers in different flood seasonal phases assembly. **【Conclusion】**The result was more specific and precise. The result was coarse based on fuzzy set theory, but the flood limited level seasonal can be calculated using the value of membership grade as coefficient.

Key words: reservoir; reservoir operation; division of flood seasonal phase; limited water level; utilization of flood water resources

* [收稿日期] 2009-01-09

[基金项目] 国家自然科学基金项目(50709027); 陕西省自然科学基金项目(2006D09)

[作者简介] 张建生(1972—), 男, 河南偃师人, 高级工程师, 主要从事水资源系统工程研究。

E-mail: zhangjiansheng@xiaolangdi.com.cn

近年来,水资源的需求不断增大,作为重要的供水水源,人们对水库水量、水质及供水保证率的要求日益提高^[1]。因此,制定水库分期汛限水位,使水库调度运行更符合流域洪水特性,是实现洪水资源利用、缓解水资源短缺矛盾的一个重要途径^[2]。而对水库控制流域的汛期进行科学合理的划分是制定分期汛限水位的前提^[3]。汛期分期的本质属于高维时序样本的聚类问题,因此有可能可以利用聚类分析方法对其进行定性与定量的研究^[4-5]。目前,已有学者在这方面进行了相关研究,如侯玉等^[6]将分形理论及其方法用于汛期分期;陈守煜^[7]提出汛期具有模糊特性,可以将模糊集合理论用于汛期的划分;刘攀等^[8]、方斌等^[9]也分别利用变点分析方法与圆形分布法对汛期分期进行了研究。这些汛期分期方法均具有较强的理论依据,但由于其在汛期分期中或仅考虑单个影响因子,或在阈值的选取上存在较大的主观性,或无法进行分期结果的判别,从而使其在实用性上仍存在一定的局限性。为此,本研究基于分形理论和模糊集合理论,对安康水库进行了汛期分期求解,并对不同的分期结果进行了对比研究,以期为最佳汛期分期方法的选择及改进提供依据。

1 汛期分期的理论与方法

汛期分期虽属高维时间序列的复杂聚类问题,但仍具有一些固有特征:(1)影响因素众多,如汛期受到天气系统、下垫面条件等多种因素的影响,所以应进行综合分析;(2)水文系列具有较强的时序性,故分期不可破坏其时序性;(3)对于分期的结果,还应给出其对应的判别指标,以评价分期的合理性。

1.1 汛期分期的分形理论与方法

“分形(Fractal)”一词,是曼德尔罗特(Mandelbrot)教授于1975年首先提出的,其原意为“不规则的、分数的、支离破碎的”^[10]。分形理论揭示了非线性系统中有序与无序的统一及确定性与随机性的统一,自相似性与无序性是分形的两个重要特性,分形的定量化方法即分维。水文过程具有非线性和自相似性等特性,因此可用分形理论来研究汛期分期,以容量维数作为汛期分期的判别指标。

具体方法是:对于时序性为 n 的样本序列,根据其时间跨度确定时段长为 T ,取能反映该时段样本特征的特征值 Y_Q (一般取日平均流量值),计算在不同时间尺度 ϵ 的相对量度值 $NN(\epsilon)$,通过绘制 $\ln NN(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ 相关线,计算其中直线部分的斜率 b ,得到容量维数 $Db = 2 - b$ 。若容量维数 Db 在某一

时段 T 内变化很小,即为确定的一个分期。

1.2 汛期分期的模糊集合理论与方法

客观世界存在的大量事物、现象都具有属性不分明、处于中介或模棱两可的模糊性特点。由于经典集合论“非此即彼”的特性,其无法对这种广泛存在的模糊性进行度量和描述。因此,扎德(Zaden)教授于1965年创立了模糊集合理论,使得客观事物中的大量模糊性、模糊现象、模糊概念可用模糊集合理论加以定量刻画,并由此开创了模糊数学^[11]这个新的数学分支。

“汛期”是某特定期期的一个模糊子集(记为 A)。对于这个集合,不宜指明那些元素 t (时刻)一定属于它,那些元素一定不属于它。只需对每个元素 t 确定一个数 μ_A ,用这个数来表示该元素 t 对模糊集合 A 的隶属程度,即是用隶属度来描述处于非汛期向汛期(或汛期向非汛期)中介过渡段的元素对差异一方所具有的倾向性^[12]。

有研究表明,理论隶属函数的线形,在非汛期向主汛期过渡段的隶属函数为升半正态分布,在主汛期为矩形分布,在主汛期向非汛期过渡段为降半正态分布,且两过渡段基本具有对称性^[13]。汛期理论隶属函数可以用下式表示^[14]:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{a_1-t}{b_1}\right)^2}, & t < a_1, b_1 > 0; \\ 1, & a_1 \leq t \leq a_2; \\ e^{-\left(\frac{t-a_2}{b_2}\right)^2}, & t > a_2, b_2 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中: a_1 、 a_2 分别为主汛期开始和结束的时间(月-日); b_1 、 b_2 为与水库库容特性有关的参数。

1.3 分期评判指标的建立

以往对汛期分期的研究多停留于各种理论方法本身,而对分期结果的评判很少涉及。这一方面是因为汛期的物理成因复杂多变,很难建立直接反映分期本质的物理模型;另一方面,是因为尚未建立分期结果判别指标体系,对于所获得的分期结果尚无法进行科学合理的评判。

一个系列的均方差能够反映该系列各样本的相对集中或离散程度,汛期分期的实质正是将一个长系列分为几个样本特征相对一致的集中短系列,而主汛期较前汛期或后汛期更为重要,是水库运用的关键时期。因此,可对于汛期不同分期阶段赋予不同的权重(一般选取的主汛期权重比较大)。基于以上理论,本研究首次提出了考虑权重因子的均方差评判指标 S ,以用于对基于不同方法的分期结果进行评价。评价指标 S 可用下式表示:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{q+1} \lambda_k \sqrt{\frac{\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}} (x_{i,j} - x_{i,k})^2}{m_{k+1} - m_k}} \quad (2)$$

式中： n 为样本个数，即年份数； q 为分期点个数， $q+1$ 为分期个数； k 为汛期分期的时段数目； λ_k 为第 k 个分期时段对应的权重因子（可根据不同分期段的偏向设定）； m_k 为第 k 个分期时段的长度（天数）； $x_{i,j}$ 为所选取检验分期结果的指标量，一般选取日径流量，其中 i 为汛期内的天数， j 为汛期的年数。

2 实例应用

2.1 安康水库概况

安康水库位于汉江上游陕西省境内，是一座以

发电为主，兼顾防洪、航运等综合利用的大型水利枢纽。坝址火石岩位于安康市城西 18 km 处，控制流域集水面积 35 700 km²，水库多年平均降雨量为 800 mm，多年平均径流量 180 亿 m³。由于受季风气候的控制，降水在年内分配很不均匀，夏秋两季降水量占全年降水量的 80%，尤以 6～9 月降水量最大，占全年降水量的 60% 左右。

2.2 基于分形理论的安康水库汛期分期

选取安康水库 1965～2000 年历年汛期日最大径流量资料（图 1），利用分形理论进行汛期分期研究^[5]。

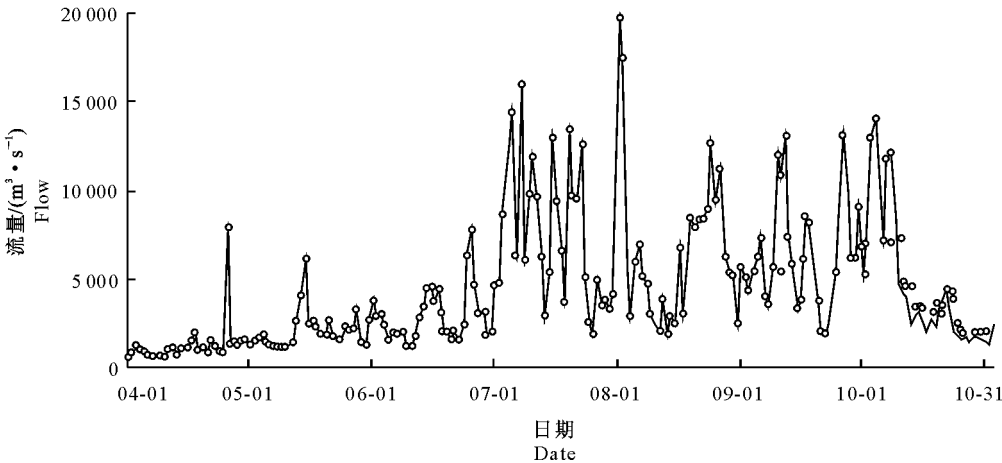


图 1 安康水库汛期日最大径流量散点图

Fig. 1 Scattergram of Ankang Reservoir of everyday max run in flood season

按照前面有关应用于汛期分期的分形学理论，计算以 05-01 为起点的第一洪水分期（前汛期）。初取第一分期时间为 05-01—05-30，即 $T=30$ d，同时，取切割水平 $Y_Q=1\ 600\ \text{m}^3/\text{s}$ （略大于平均流量）作为能够反映样本特征的特征值，变换不同的时间

尺度 ϵ （分别取 1, 2, ..., 4, 5 d），然后根据上述步骤，绘制出 $\ln NN(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ 相关图（图 2），找到直线段及其斜率 b ，即可求得该 T 分期的容量维数 Db ，所得结果如表 1 所示。

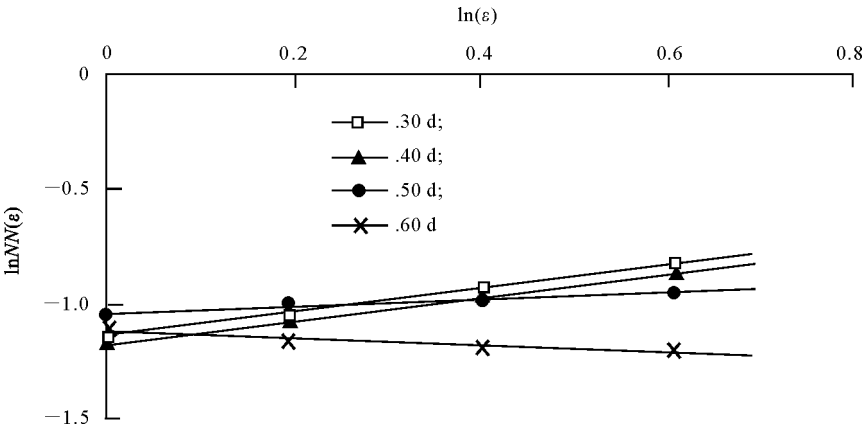


图 2 安康水库前汛期 $\ln NN(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ 相关图

Fig. 2 $\ln NN(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ relation of front flood season for Ankang Reservoir

表 1 安康水库前汛期不同分期时间容量维数的计算结果

Table 1 The different capacity dimension of front flood season for Ankang Reservoir

编号 Num	分期 Time of flood seasonal phases		<i>b</i>	<i>Db</i>
	<i>T</i> /d	起止时间		
		Start and end time		
A	30	05-01—05-30	0.485	1.515
B	40	05-01—06-10	0.470	1.530
C	50	05-01—06-20	0.415	1.585
D	60	05-01—06-30	−0.152	2.152

由表 1 及图 2 可知, 当时间 T 取 60 d 时, $\ln NN(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ 相关图上直线段的斜率发生了较大变化(为负值), 对应的容量维数也最大。而在另 3 个时段, 即 $T=30, 40, 50$ d 时, 容量维数的变化幅

度很小, 可认为是一个分期。由此可得安康水库前汛期的分期时间为 05-01—06-20。依照上述方法, 求得安康水库汛期分期结果如表 2 所示。

表 2 基于分形理论的安康水库汛期分期结果

Table 2 Result of division of flood seasonal phases for Ankang Reservoir based on fractal theory

分期名 Name of flood seasonal phases	\overline{Db}	起止时间 Start and end time
前汛期 Previous flood seasonal phases	1.54	05-01—06-20
主汛期 1 Main flood seasonal phase 1	1.80	06-21—07-20
主汛期 2 Main flood seasonal phase 2	1.84	07-21—08-20
后汛期 Latter flood seasonal phase	1.72	08-21—10-10

2.3 基于模糊集合理论的安康水库汛期分期

根据安康水库 1965 ~ 2000 年汛期实测洪水资料, 按照直接模糊统计的方法, 以汛期第一场洪水和最后一场洪水发生的时间作为汛期划分指标, 获得汛期模糊集样本, 计算每天被汛期样本覆盖的次数, 并计算出其频率, 进而求出安康水库汛期各天的经验隶属度。根据汛期各天经验隶属度 μ_t 经验, 通过调整参数, 采用最小二乘法准则, 使

$$E = \sum_{t=1}^n (\mu_{\text{理论}} - \mu_{\text{经验}})^2. \tag{3}$$

式中: E 为误差值, n 为计算时段长, t 为计算时间, $\mu_{\text{理论}}$ 为理论隶属度值, $\mu_{\text{经验}}$ 为经验隶属度值。

以 E 取最小值, 按照上述隶属函数线形公式 (1) 进行参数拟合, 可得到理论隶属函数的参数为:

$a_1 = 07-16; a_2 = 08-20; b_1 = 55.22; b_2 = 59.99$ 。
由此, 确定出安康水库汛期的理论隶属度函数为:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{07-16-t}{55.22}\right)^2}, & 05-01 < t < 07-16; \\ 1, & 07-16 \leq t \leq 08-20; \\ e^{-\left(\frac{t-08-20}{59.99}\right)^2}, & 08-20 < t \leq 10-31. \end{cases} \tag{4}$$

由此得到安康水库汛期逐日隶属度计算结果如表 3 所示。

表 3 安康水库汛期逐日隶属度计算结果

Table 3 Result of everyday membership grade of Ankang Reservoir in flood season

日期 Date	隶属度 Membership grade	日期 Date	隶属度 Membership grade	日期 Date	隶属度 Membership grade
05-01—05-10	0.109	07-01—07-10	0.858	09-01—09-10	0.797
05-11—05-20	0.180	07-11—07-15	0.969	09-11—09-20	0.662
05-21—05-31	0.279	07-16—07-31	1.000	09-21—09-30	0.521
06-01—06-10	0.420	08-01—08-15	1.000	10-01—10-10	0.388
06-11—06-20	0.569	08-16—08-20	1.000	10-11—10-20	0.273
06-21—06-30	0.722	08-21—08-31	0.964	10-21—10-31	0.182

注: 这里取隶属度 $\hat{\mu}(t)$ 的阈值 $\lambda = 0.97$ 。
Note: The threshold values of membership grade $\hat{\mu}(t)$ is $\lambda = 0.97$.

由表 3 可知, 当隶属度为 1 时, 该时段即为主汛期。由此可得到模糊集合理论下安康水库的汛期分

期结果, 如表 4 所示。

表 4 基于模糊集合理论的安康水库汛期分期结果

Table 4 Result of division of flood seasonal phases for Ankang Reservoir based on fuzzy set theory

分期名 Name of flood seasonal phases	$\bar{D}b$	起止时间 Start and end time
前汛期 Previous flood seasonal phase	0.51	05-01—07-15
主汛期 Main flood seasonal phase	1.00	07-16—08-20
后汛期 Latter flood seasonal phase	0.54	08-21—10-31

2.4 评判指标 S 的求解

这里选取安康水库 1965 ~ 2000 年汛期 (05-01—10-31)逐日的日径流量作为汛期水库的特征指标量, 根据式 (2), 在 3 组不同的权重组合 (分形理论

下的主汛期为 2 个阶段, 因此将主汛期权重进行均分)下, 求得分形理论方法和模糊集合理论方法下的不同汛期分期结果评判指标 S , 其结果见表 5。

表 5 不同权重因子下基于模糊集合理论与分形理论的安康水库洪水汛期分期均方差指标比较

Table 5 Comparison of the MSE index of fuzzy set theory and fractal theory for flood seasonal phases with different power Ankang Reservoir

项目 Item	模糊集合理论 Fuzzy set theory				分形理论 Fractal theory				$S_{Fractal}$
	前汛期 Previous flood seasonal phase	主汛期 Main flood seasonal phase	后汛期 Latter flood seasonal phase	S_{Fuzzy}	前汛期 Previous flood seasonal phase	主汛期 1 Main flood seasonal phase 1	主汛期 2 Main flood seasonal phase 2	后汛期 Latter flood seasonal phase	
均方差 均值 Average MSE	645	552	735		671	490	521	686	
权重因子	0.3	0.4	0.3	636	0.3	0.2	0.2	0.3	609
Power	0.25	0.5	0.25	622	0.25	0.25	0.25	0.25	592
factor	0.2	0.6	0.2	608	0.2	0.3	0.3	0.2	589

由表 5 可知, 除前汛期外, 分形理论下其余各分期的均方差均值及 3 组不同权重因子下的 $S_{分形}$, 均小于模糊集合理论下的对应指标。表明采用分形理论求得的汛期分期结果更能反映实际情况, 且更为详尽与合理。

3 结 语

本研究将 2 种汛期分期中相对比较成熟的方法——模糊集合理论分期法和分形理论分期法, 应用于水库汛期分期的对比研究, 并首次提出了考虑权重因子的均方差评判指标 S , 并对分期结果进行了判别。以安康水库汛期分期为例进行分析, 可得到以下结论:

1)采用分形理论求得的汛期分期更为详尽、具体。本研究中应用分形理论获得的汛期可分为 4 个阶段, 能够更全面地反映汛期不同阶段的规律。而模糊集合理论下的汛期分期一般只能分为 3 个阶段, 且无法获得后汛期结束的时间 (分形理论下的后汛期结束时间为 10-10), 算法较为机械; 而且在模糊集合理论下, 选取主汛期时要确定 1 个阈值, 因而受人为主观因素影响较大, 所得分期结果略显粗糙。

2)以考虑权重因子的均方差评判指标 S 进行分

期结果评判, 除前汛期外, 分形理论下其余分期的均方差均值以及在 3 组不同权重因子下的 $S_{分形}$, 均小于模糊集合理论下的对应指标, 从而更深刻地反映出分形理论相对于模糊集合理论用于汛期分期时的客观性与科学性。

3)采用模糊集合理论进行汛期分期的过程中, 要确定汛期各日对于汛期的隶属度, 而汛期的隶属度与相应时段的防洪库容有对应的映射关系, 则可利用实际隶属度的大小作为比例系数来确定相应时段所需的防洪库容, 进而直接求得对应时段的分期汛限水位, 这是模糊集合理论较其他理论方法对于汛期分期的优势所在。

总之, 汛期分期是个复杂的高维时间序列聚类问题, 要很好求得全面反映汛期特征的分期, 需要综合运用各种相关方法, 不断改进现有理论方法的缺陷。另外, 要逐步建立汛期分期结果的评判体系, 对所获得的分期结果进行科学、客观的评判与验证。

[参考文献]

[1] 王国安. 关于我国水库的防洪标准问题 [J]. 水利学报, 2002, 12(2): 42-45.
Wang G A. On flood prevention standard of reservoirs in China [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, 12(2): 42-45. (in

- Chinese)
- [2] 胡四一, 高 波. 海河流域洪水资源安全利用研究 [J]. 中国水利, 2002, 12(10): 105-108.
Hu S Y, Gao B. Study on the flood resources safety utilization Haihe River Basin [J]. China Water Resources, 2002, 12(10): 105-108. (in Chinese)
- [3] 刘克琳, 王银堂, 胡四一. 水库汛期分期定量分析方法的应用比较研究 [J]. 水利水电技术, 2006, 37(9): 76-78.
Liu K L, Wang Y T, Hu S Y. Comparative study on application of quantitative analysis methods to division of flood seasonal phases for reservoir [J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2006, 37(9): 76-78. (in Chinese)
- [4] Cunderlik J M, Ouada T B M J, Bob B. On the objective identification of flood season [J]. Water Resources Research, 2004, 20(15): 1-12.
- [5] Cole. Building environmental assessment methods: clarifying intentions [J]. Building Research and Information, 1999, 27(5): 230-246.
- [6] 侯 玉, 吴伯贤. 分形理论应用于洪水分期的初步探讨 [J]. 水科学进展, 1999, 10(2): 140-143.
Hou Y, Wu B X. Preliminary study on the seasonal periods classification of floods by using fractal theory [J]. Advances in Water Science, 1999, 10(2): 140-143. (in Chinese)
- [7] 陈守煜. 从研究汛期描述水文系统模糊集分析的方法论 [J]. 水科学进展, 1995, 6(2): 133-138.
Chen S Y. Methodology of fuzzy sets analysis to hydrologic system from research on flood period description [J]. Advances in Water Science, 1995, 6(2): 133-138. (in Chinese)
- [8] 刘 攀, 郭生练, 王才君. 三峡水库汛期分期的变点分析方法研究 [J]. 水文, 2005, 25(1): 18-22.
Liu P, Guo S L, Wang C J. Flood season staged for three gorges reservoir based on the change-point approach [J]. Journal of China Hydrology, 2005, 25(1): 18-22. (in Chinese)
- [9] 方 彬, 郭生练, 刘 攀. 汛期分期的圆形分布法研究 [J]. 水文, 2007, 27(5): 7-11.
Fang B, Guo S L, Liu P. Identification of flood seasonality by circular distribution method [J]. Journal of China Hydrology, 2007, 27(5): 7-11. (in Chinese)
- [10] 张济忠. 分形 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995: 12-78.
Zhang J Z. Fractal [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1995: 12-78. (in Chinese)
- [11] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353.
- [12] 谢季坚. 模糊数学方法及应用 [M]. 2 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000: 37-41.
Xie J J. Fuzzy mathematics and its application [M]. 2nd Ed. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2000: 37-41. (in Chinese)
- [13] 陈世权. 模糊集论及其处理的狭义模糊性问题 [J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2001, 20(5): 586-589.
Chen S Q. Fuzzy sets theory and its relevant issue dealt with narrow fuzziness [J]. Journal of Liaoning technical University: Natural Science Edition, 2001, 20(5): 586-589. (in Chinese)
- [14] 马永胜, 黄 强, 王义民, 等. 基于模糊集理论的石泉水库分期汛限水位确定 [J]. 水电能源科学, 2008, 26(3): 47-49.
Ma Y S, Huang Q, Wang Y M, et al. The determination to seasonal flood limited level of shiquan reservoir based on fuzzy set theory [J]. Water Resources and Power, 2008, 26(3): 47-49. (in Chinese)
- [15] 刘 招. 水库的洪水资源化理论和方法研究 [D]. 西安: 西安理工大学, 2008.
Liu Z. Study on theory and method of the flood resources utilization based on reservoir [D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2008. (in Chinese)

(上接第 228 页)

- [10] Kanani I A, Bakhtian M, Borghei S M, et al. Evolutionary algorithms for the determination of critical depths in Conduits [J]. Irrig and Drain Engrg, 2008, 134(6): 847-852.
- [11] 陈应华, 袁晓辉, 袁艳斌. 粒子群优化在临界水深计算中的应用 [J]. 水电能源科学, 2006, 24(1): 55-57.
Chen Y H, Yuan X H, Yuan Y B. Application of particle swarm optimization in calculation of critical water depth [J]. Water Resources and Power, 2006, 24(1): 55-57. (in Chinese)
- [12] Hooke R, Jeeves T A. Direct search solution of numerical and statistical problems [J]. Journal of the Association for Computing Machinery (ACM), 1961, 8(2): 212-229.
- [13] Torczon V. On the convergence of pattern search algorithms [J]. SIAM Journal on Optimization, 1997, 7(1): 1-25.
- [14] Lewis R M, Torczon V. Pattern search methods for bound constrained minimization [J]. SIAM Journal on Optimiz, 1999, 9(4): 1082-1099.
- [15] Lewis R M, Torczon V. Pattern search methods for linearly constrained minimization [J]. SIAM Journal on Optimiz, 2000, 10(3): 917-941.